ENSGSI 1ère A Ingénieur Mardi 28 juin 2005

RESISTANCE des MATERIAUX

Documents non autorisés
Durée 2 h

Le but du problème est de déterminer la réponse dynamique d'une structure. La structure est une poutre encastrée à une extrémité et simplement appuyée à l'autre comme le montre la figure 1 :

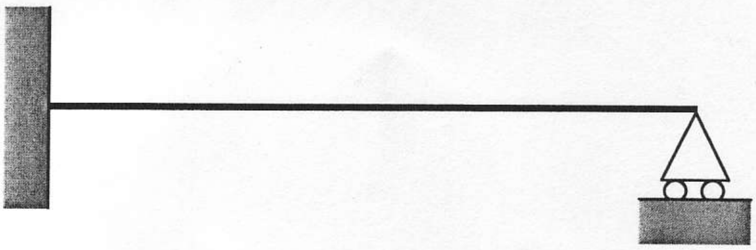

figure 1

La première partie est une étude statique : elle permettra de définir la perturbation appliquée à la structure. La seconde partie consiste à déterminer la réponse à cette perturbation.

PARTIE I : Etude statique

La poutre est chargée uniformément avec une densité linéique de charge p, voir figure 2 :

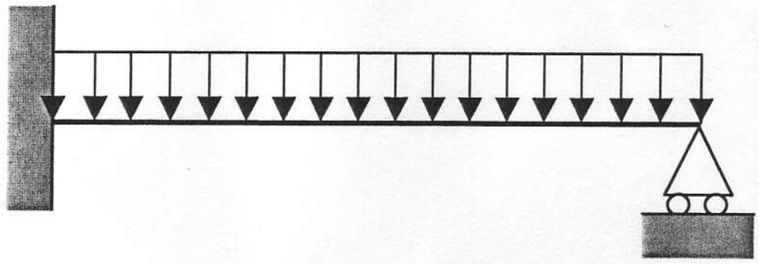

figure 2

Les principales notations sont définies sur la figure 3 :

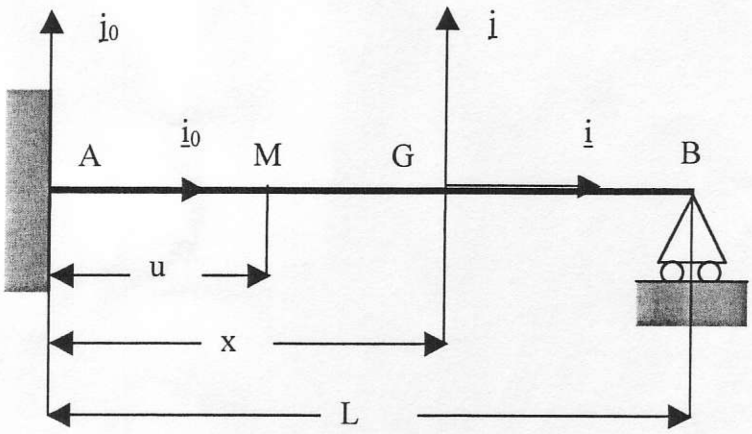

figure 3

L est la longueur de la poutre, x l'abscisse d'un point courant compris entre A et B et u l'abscisse d'un point courant compris entre A et G.

Question 1 : montrer que le système est hyperstatique extérieurement de degré 1.

Question 2 : on choisit comme inconnue hyperstatique la réaction de l'appui simple. Définir le système isostatique associé ainsi que la condition d'équivalence entre le système isostatique associé et le système réel.

Question 3 : déterminer les efforts intérieurs T_y et M_z en fonction de l'inconnue hyperstatique.

Question 4 : on se place dans le cadre de la théorie de Navier-Bernoulli. Déterminer l'équation de la fibre moyenne déformée sachant qu'elle est donnée par la relation $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$ où EI_z est la rigidité de flexion de la poutre.

PARTIE II : Etude dynamique

La réponse en déplacement de la structure peut écrite sous la forme $v(x,t) = \sum_i Y_i(t)V_i(x)$ où $Y_i(t) = E_i \cos\omega_i t + F_i \sin\omega_i t$ avec ω_i les pulsations propres et $V_i(x)$ les modes propres.

Dans le cadre de la théorie de Navier-Bernoulli et en négligeant l'influence de l'inertie de rotation des sections, $V_i(x) = A_i \mathrm{ch}\beta_i x + B_i \mathrm{sh}\beta_i x + C_i \cos\beta_i x + D_i \sin\beta_i x$ avec $\beta_i^4 = \omega_i^2 \frac{\rho S}{EI_z}$ où ρS est la masse linéique de la poutre et EI_z sa rigidité de flexion.

Question 5 : les constantes A_i, B_i, C_i et D_i sont déterminées à partir des conditions aux limites. Ecrire, en fonction de v, ces conditions.

Question 6 : déterminer l'équation aux pulsations propres, c'est à dire l'équation permettant de calculer les pulsations propres ω_i (ou β_i).

Question 7 : les conditions aux limites imposent que les modes propres s'écrivent sous la forme $V_i(x) = A_i\left((\mathrm{ch}\beta_i x - \cos\beta_i x) - R_i(\mathrm{sh}\beta_i x - \sin\beta_i x)\right)$. Déterminer les coefficients R_i.

Les conditions initiales sont telles que $v(x,0)$ est la déformée déterminée dans la partie I et telles que $\dot{v}(x,0) = 0$. La réponse en déplacement de la structure sera approchée par le premier terme $v(x,t) = Y_1(t)V_1(x)$.

Question 8 : sachant que $Y_i(0) = \frac{\int_0^L \rho S\, v(x,0)V_i(x)dx}{M_i}$ et $\dot{Y}_i(0) = \frac{\int_0^L \rho S\, \dot{v}(x,0)V_i(x)dx}{M_i}$, déterminer les coefficients E_1 et F_1 qui correspondent au premier mode et préciser la réponse.

Pour le premier mode, on trouve $\beta_1 L = 3{,}9266$, $R_1 = 1{,}0008$ et $M_1 = A_1^2 \rho S L$ pour la masse généralisée. Vu la nature du problème, le chargement généralisé est nul.

On admettra que $\int_0^L x^4 V_1(x)dx = 0{,}1488\, A_1 L^5$, $\int_0^L x^3 V_1(x)dx = 0{,}2061\, A_1 L^4$ et $\int_0^L x^2 V_1(x)dx = 0{,}3022\, A_1 L^3$.